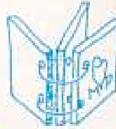
लेखकाविषयी :

प्रा. मनोहर रामचंद्र राईलकर

- Δ स. प. महाविद्यालय, पुणे येथील गणिताचे निवृत्त शिक्षक व विभागप्रमुख.
- Δ नू. म. वि. प्राथमिक व शिशुशाळा या संस्थांचे 9 वर्षे प्रमुख.
- Δ बालभारतीच्या गणित समितीचे मानद सभासद (सुमारे 9 वर्षे) व पाठ्यपुस्तकांचे लेखन.
- Δ मा. शा. प. मंडळाच्या गणित अभ्यास मंडळाचे सभासद (सुमारे 9 वर्षे).
- Δ 1989 मध्ये निवृत्त.
- Δ निवृत्तीनंतर प्राथमिक व माध्यमिक शिक्षणाशी घनिष्ठ संबंध.
- Δ माध्यमिक व प्राथमिक शिक्षक व पालकांकरता मार्गदर्शक पुस्तकांचे लेखन.
- Δ प्राथमिक शिक्षकांकरता कृतिसत्रे.
- Δ कित्येक नियतकालिकातून शिक्षकांकरता मार्गदर्शक लेख.
- Δ विज्ञान कथाकार, संस्कृत एकांकीकाकार म्हणूनही लेखन.
- Δ अपूर्णांक शिकण्या-शिकवण्याकरता संगणकाच्या माध्यमाद्वारे चित्रिकांची सी.डी.

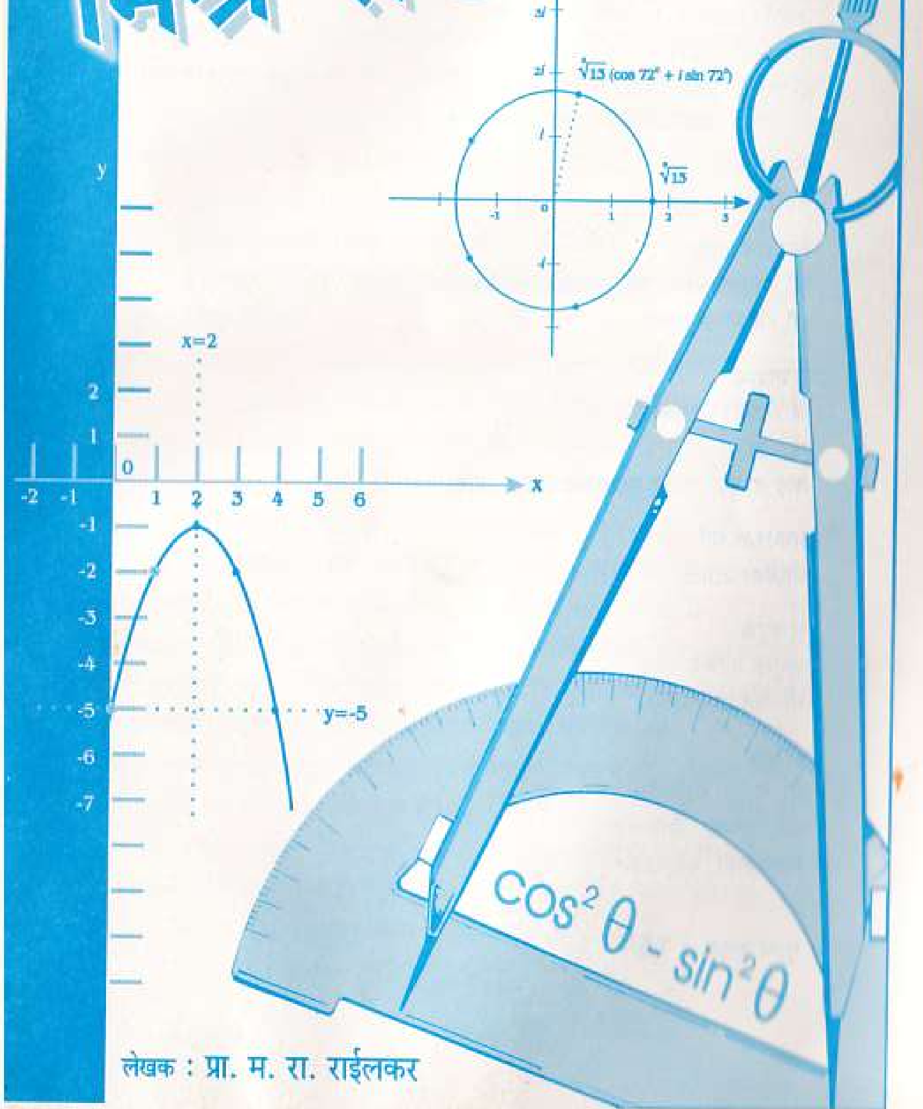


पुस्तिका क्र. 1

वाई तालुका गणित अध्यापक मंडळ, वाई

द्वारा : श्री. ना. शं. मोने, 1123, भाग्योदय, ब्राह्मणशाही, वाई-412 803

मिश्र संख्या



लेखक : प्रा. म. रा. राईलकर

अक्षरजुळणी
प्रा. मनोहर रा. राईलकर

मुद्रक
परशुराम प्रोसेस
34/8, एरंडवणा, गुळवणी महाराज पथ
पुणे - 411 004
दूरध्वनी : 25430891
25421344

संपादक
नागेश शंकर मोने

संपादन साह्य
श्री. सावंत अरुण, श्री. भुजबळ भगवान
सौ. जोशी अनुराधा

प्रकाशक
श्री. फरांदे दिनकर वि.
अध्यक्ष,
वाई तालुका गणित अध्यापक मंडळ, वाई

प्रकाशन वर्ष
नोव्हेंबर 2005

मुखपृष्ठ
अमृता वाळिंबे
मो-9822850507

लेखक
प्रा. म. रा. राईलकर
56, मृण्मयी, जेधेनगर
बिबवेवाडी, पुणे-37

मूल्य रुपये - **15/-**

मिश्र संख्या

प्रास्ताविकः

काः सर, जसं वर्गसमीकरणं सोडवण्याचं सूत्र असतं, तशी घन किंवा मोठ्या घातांची समीकरणं सोडवण्याची सूत्रं असतात का?

प्रा.: घनसमीकरण म्हणजे तिसऱ्या घाताचं आणि दुसरं तुम्ही विचारलंत ते चौथ्या घाताचं चतुर्थसमीकरण, अशी दोन प्रकारची समीकरणं सोडवण्याची सूत्रं म्हणत असाल तर उत्तर 'होय' असं आहे. पण त्याहून मोठ्या घाताची समीकरणं सोडवण्याची सूत्रं विचाराल तर उत्तर 'नाही'असं आहे. थोडक्यात, पाचव्या किंवा अधिक घाताची समीकरणं सूत्रांच्या रूपात सोडवता येत नाहीत, हे प्रमेयच मुळी सिद्ध झालं आहे.

ता.: तिसऱ्या आणि चौथ्या घाताची समीकरणं सोडवण्याची सूत्रं आम्हाला समजतील?

प्रा.: तुलनेनं घनसमीकरण म्हणजे तिसऱ्या घाताचं समीकरण सोडवणं फारसं सोपं नसलं तरी, चौथ्याचं फार, म्हणजे फारच गुंतागुंतीचं आहे. गंमत अशी की चौथ्या घाताचं समीकरण सोडवण्याकरता तिसऱ्या घाताच्या समीकरणाचं सूत्र वापरावं लागतं. आणि घनसमीकरण सोडवायला....

मो.: वर्गसमीकरणाचं सूत्र लागतं का?

प्रा.: बरोबर. पण, तेवढ्यानंही भागणार नाही. त्याकरता आधी, थोड्या फार प्रमाणात तरी मिश्र संख्यांचं गणित समजून घ्यायला हवंच. घनसमीकरण समजायला काहीसं अवघड आहे. आणि अत्यंत किचकट आहे. ते आपण पुन्हा कधीतरी पाहू. तेव्हा, घनसमीकरणं आणि अर्थातच चतुर्थसमीकरणं यांचा विचार करण्याऐवजी मिश्र संख्या म्हणजे काय ते पाहू. शिवाय, ते करतानाच मिश्र संख्या, भौतिकीमधील सदिश, निर्देशक भूमिती, त्रिकोणमिती यांच्यांतला परस्परसंबंध समजून घेणंही बोधप्रद ठरेल. पुढच्या आयुष्यात जी मुलं आपल्या आवडीचा म्हणून गणित विषय निवडतील त्यांना ह्या विषयांचा आणि अमूर्त बीजगणिताचा काय संबंध आहे तेही कळेल.

ता.: ह्या सर्वांचा परस्परसंबंध आहे म्हणता?

प्रा.: आहे ना. आणि बाह्यतः काहीही संबंध नाही असं वाटणाऱ्या गणिताच्या विविध शाखांचा किती घनिष्ठ संबंध आहे, हे पाहणंही मनोरंजक असतं. ते असो. तर मिश्र संख्या तुम्हाला माहीत आहेत, की सांगू?

दो.: आम्हाला माहीत नाही, असंच समजा. तसं आम्ही कॉलेजात असताना शिकलो होतो. पण, त्याला कितीतरी वर्षं झाली. तेव्हा, आम्हाला काहीच माहीत नाही असं समजून ते सर्व पुन्हा सांगा.

प्रा.: आपल्या गरजेपुरतं सांगतो. आपण संख्यांची प्रगती कसकशी केली ते तुम्हाला माहीत आहेच. त्याचा आधी त्रोटक आढावा घेऊ. आरंभी आपल्याकडे नैसर्गिक संख्या होत्या. मग वजाबाकी करता यावी म्हणून शून्य आणि ऋण संख्या, नंतर भागाकार करण्यासाठी परिमेय संख्या आणि वर्गमूळ काढता यावेत म्हणून अपरिमेय संख्या, अशी टप्प्याटप्प्यानं निरनिराळ्या अडचणी सोडवण्याकरता आपण नवनवीन संख्यांची निर्मिती केली. तरीही सर्व अडचणींचा निरास झालाच नाही.

मो.: उदाहरणार्थ?

प्रा.: सर्व वर्गसमीकरणं वास्तव संख्यांनी सोडवता येतातच असं नाही.

मो.: का? कोणतंही वर्गसमीकरण सोडवण्याचं सूत्रच आहे की!

प्रा.: पण, त्या सूत्रात विवेचक $\triangle=\surd(b^2-4ac)$ असा एक राशी येतो. आणि त्यातील करणी-चिन्हाखालचा b^2-4ac हा राशी ऋण असेल तर आपला मार्ग खुंटलाच की! म्हणजे सर्वच वर्गसमीकरणं केवळ वास्तव संख्यांच्या मर्यादेत सोडवता येतातच असं नाही, हे तर खरं?

का.: खरंच की. पण, काही उदाहरणं?

प्रा.: आधी अगदी साधं उदाहरण घ्या. $x^2+1=0$ हे वर्गसमीकरण पहा. जर x वास्तव असायलाच हवा असेल तर हे समीकरण सोडवता येणार नाही. डावीकडची पदं पाहिली तर हे लागलीच लक्षात येईल. किंवा समीकरण $x^2=-1$ असं लिहिलं तरीही कळून येईल. कारण, कोणत्याही वास्तव संख्येचा वर्ग ऋण नसतो, हे आपण जाणतोच.

पण, आपण आत्ताच जो त्रोटक आढावा घेतला तोच थोड्या अधिक तपशिलानं घेऊ. पुढच्या समजुतीकरता आवश्यक आहे.

जसं, फक्त नैसर्गिक संख्यांचा उपयोग करायला मान्यता असेल तर $x+5=3$ हे समीकरण सोडवता येणारच नाही. कारण, 5 मध्ये

कोणतीही नैसर्गिक संख्या मिळवली तरी उत्तर 5 पेक्षा जास्तच येतं. निराळ्या शब्दांत, कधीही 3 येऊ शकत नाही. म्हणून तर आपण ऋण संख्यांची कल्पना केली.

पुढचा दुसरा टप्पा म्हणून, केवळ पूर्णांक संख्यांचा उपयोग करायचा तर $3x=6$ हे किंवा $3x=-6$ हे समीकरण सोडवता येईल. पण $6x=3$ हे येणार नाही. कारण कोणत्याही पूर्णांक संख्येला 6 नं गुणलं की गुणाकार 6 पेक्षा अधिकच येणार ना? निराळ्या शब्दांत, कधीही 3 येणार नाही. म्हणून तर आपण परिमेय संख्यांची निर्मिती केली.

आपला, त्यानंतरचा किंवा तिसरा टप्पा वर्गमुळांचा, किंवा अपरिमेय संख्यांचा आहे. अधिक अचूक बोलायचं तर बैजिक संख्यांचा. पण ते योग्य वेळी पाहू. केवळ परिमेय संख्यांचा उपयोग करायचा असेल तर $x^2=4$ हे समीकरण सोडवता येईल. पण $x^2=2$ हे मात्र येणार नाही. कारण कोणत्याही परिमेय संख्येचा वर्ग 2 नसल्याचं म्हणजेच $\surd 2$ परिमेय संख्या नसल्याचं तुम्हाला माहीतच आहे. याप्रमाणं प्रगती करीत करीत आपण वास्तव संख्यांपर्यंत येऊन पोचलो. तरीही, सर्वच वर्गसमीकरणं सोडवता येतातच असं नाही, हे आत्ताच आपण पाहिलं. तीही सोडवता यावीत, याकरता आपण आणखी पुढं जायला हवं.

मिश्र संख्याः

जिचा वर्ग -1 आहे, अशा संख्येची कल्पना करू. किंबहुना ज्यांचे वर्ग ऋणच असतील अशा नवीन संख्यांची कल्पना करू.

जरी आपण -3, -7, इत्यादी निरनिराळ्या ऋण संख्यांची कल्पना केली तरीही सर्वांच्या मुळाशी -1 हीच (ऋण एकक unit) संख्या आहे, असं म्हणू शकतो. तद्वतच, इथंही आपण जिचा वर्ग -1 आहे, अशी एकच मूलभूत नवी संख्या घेऊन पुरेल. ही संख्या सामान्यतः गणितात i ह्या इंग्रजी अक्षरानं (imaginary शब्दाचं पहिलं अक्षर म्हणून) दाखवण्याची पद्धत आहे. थोडक्यात, $i^2=-1$ हा नव्या संख्यांचा आरंभबिंदू होय. यावरून $(2i)^2=2^2i^2=-4$, $(3i)^2=9i^2=-9$, आणि त्यावरून आपण $\surd(-4)=2i$ आणि $\surd(-9)=3i$, असं म्हणू शकतो. i ला काल्पनिक एकक (imginary unit) म्हणतात. ह्यांना काल्पनिक संख्या असं नाव त्यावेळच्या गणित्यांनी दिलं.

पण, इथं *काल्पनिक*चा भाषेतला अर्थ विसरायचा. वास्तव नाहीत म्हणून काल्पनिक, इतकंच. कारण, तसं पाहिलं तर नैसर्गिक संख्या सोडल्यास इतर सर्व संख्या गणित्यांनी आपल्या कल्पनेतूनच निर्माण केल्या असल्यामुळं काल्पनिकच नव्हेत का?

का.: पण सर, जसा आपण धन आणि ऋण संख्यांचा, किंवा पूर्णांक आणि परिमेय संख्यांचा एकाच वेळी विचार करू शकतो, तसा वास्तव आणि काल्पनिक संख्यांचा विचार एकाच वेळी करता येणार नाही का?

प्रा.: तिकडेच येतोय मी आता. खरं तर एकत्रितच विचार करायचाय. पूर्णांकयुक्त अपूर्णांक असतातच नाही का? तर, वास्तव आणि काल्पनिक संख्यांचा विचार एकत्रच करतात. म्हणजे एकाच संख्येत काही भाग वास्तव आणि काही भाग काल्पनिक अशीच परिस्थिती बहुधा उद्‌भवेल. म्हणूनच तर त्यांना मिश्र (complex) संख्या म्हणतात. अर्थात, केवळ वास्तव, किंवा केवळ काल्पनिक, अशा संख्यांचा विचार अपवादात्मक म्हणून करावा लागतो, हेही खरं आहे.

पण, यापूर्वीही आपण हेच धोरण अवलंबलं होतं, नाही का? मूळच्या नैसर्गिक संख्यांना धन पूर्णांक संख्या म्हटलं. पुढं जेव्हा परिमेय संख्यांची निर्मिती केली तेव्हा मूळच्या पूर्णांक संख्या आपण गरजेनुसार 2=4/2 अशा म्हणजे परिमेय संख्यांच्या रूपात लिहीत आलो. आणि 3 ही परिमेय संख्या असूनही ती $\surd 9$ अशी लिहावी लागतेच ना? कारण, आपल्याला संख्यांचं क्षेत्र वाढवायचं होतं, संख्याप्रणाली विस्तृत करायची होती. त्याकरता मुळात आपल्याजवळ असलेल्या संख्या गमावून कसं चालेल? आणि त्या गेल्या तर मग विस्तार कसं म्हणता येईल?

त्याचप्रमाणं आपल्याला मिश्र संख्या निर्माण करायच्या असताना त्यांच्यांत मूळच्या वास्तव संख्या सुरक्षित राहतील असं पाहिलंच पाहिजे. नाही तर खऱ्या अर्थानं संख्याप्रणालीचा विस्तार झाला, असं होत नाही.

आपल्या संख्या 2+3i, -4+2i, 1/2+8i, अशा प्रकारच्या असतील. म्हणूनच त्यांना मिश्र (complex) संख्या म्हणतात. जर बैजिक पद्धतीनं म्हणजे अक्षरांचाच उपयोग करून लिहायचं ठरवलं तर मिश्र संख्या x+iy अशा लिहाव्या लागतील. आणि ज्याप्रमाणं भूमितीत सोय म्हणून आपण रेषेचा निर्देश एकाच अक्षरानं करू शकतो त्याचप्रमाणं मिश्र संख्येचाही

निर्देश सामान्यतः z ह्या एकाच अक्षरानं करण्याची प्रथा आहे. म्हणजे z=x+iy असं लिहिण्याची प्रथा आहे. यातल्या x ला, मिश्र संख्या z चा वास्तव भाग (किंवा वास्तव अंश, real part) आणि y ला काल्पनिक भाग (किंवा काल्पनिक अंश, imaginary part) म्हणतात.

मो.: एक शंका.

प्रा.: तुमची शंका माझ्या लक्षात आलीय. पण, रूढ संकेतानुसार y लाच काल्पनिक अंश म्हणतात, iy ला म्हणत नाहीत. म्हणजेच काल्पनिक अंश y स्वतः वास्तव असतो! हा संकेत आता सर्वत्र मान्यता पावलेला आहे. त्यावर चर्चा वाढवून काही उपयोग नाही.

आपण एकच अपूर्णांक विविध प्रकारं लिहितो. पण भिन्न प्रकारं लिहिलेले दोन अपूर्णांक समान असण्याकरता त्यांचे तिरकस गुणाकार समान असावे लागतात, ही झाली अपूर्णांकांच्या समानतेची कसोटी. तसंच, बैजिक रीतीनं विचार करायचा असल्यानं, दोन मिश्र संख्या समान असण्याकरता अशी काही तरी कसोटी सांगितली पाहिजे. म्हणून

समानतेची कसोटी:

समजा $z_1= x_1+ iy_1$, $z_2= x_2+ iy_2$ अशा दोन मिश्र संख्या घेतल्या आहेत. मग $x_1=x_2$, $y_1=y_2$ असतील तर आणि तरच $z_1=z_2$ असतं, ही कसोटी ठरवली आहे. शब्दांत सांगायचं तर, दोन मिश्र संख्या समान असण्याकरता त्यांचे वास्तव आणि काल्पनिक भाग समान असणं ही समानतेची व्याख्याच होय. याचा अर्थ, त्या संख्या सर्वार्थानं सारख्याच असल्या पाहिजेत. आणि उलट पक्षी, जर दोन मिश्र संख्या समान दिल्या असतील तर त्यांचे वास्तव भाग समान असले पाहिजेत व काल्पनिक भागही समान असले पाहिजेत. **व्याख्या नेहमी दोन्ही दिशांनी कार्य करते.**

जेव्हा एखाद्या मिश्र संख्येचा काल्पनिक भाग शून्य असेल तेव्हा ती वास्तव संख्याच असणार. उदा. 5 + 0i अशा मिश्र संख्येला केवल वास्तव किंवा शुद्ध वास्तव (purely real) संख्या असं म्हणतात. आणि जेव्हा तिचा वास्तव भाग शून्य असतो तेव्हा तिला केवल काल्पनिक किंवा शुद्ध काल्पनिक (purely imaginary) संख्या म्हणतात. उदा. 0 + 3i. एक महत्त्वाचा मुद्दा असा की, वास्तव संख्या मिश्र संख्यांत अंतर्भूत आहेत, इतकं आपल्याला यावरून कळून येतं. म्हणजे संख्याप्रणालीचा विस्तार

झाला, असं ठरतं. दुसरा मुद्दा, समानतेच्या कसोटीप्रमाणं एखादी मिश्र संख्या शून्यच असेल तर तिचे वास्तव आणि काल्पनिक भाग दोन्ही शून्य असतात, असा निष्कर्ष निघतो. गरजेनुसार ती आपण 0=0+0i अशी लिहू शकतो. म्हणजे शून्यसुद्धा मिश्र संख्याच होय. **मिश्र संख्या बैजिक दृष्ट्या बंदिस्त (algebraically closed) असतात. म्हणजे कोणतंही बहुपदी समीकरण सोडवायला मिश्र संख्या पुरेशा ठरतात.**

अनुबद्ध मिश्र संख्या

आता मिश्र संख्यांच्या काही जोड्या मी इथं लिहितो. त्यांच्यात काय साम्य आहे आणि काय फरक आहे ते सांगा.

(1) 2 + 3i, 2 - 3i; **(2)** 5 - 7i, 5 + 7i;

(3) -4 + 5i, - 4 - 5i; **(4)** (1 + √3i)/2, (1 - √3i)/2.

का.: त्यांचे वास्तव भाग सारखे आहेत आणि काल्पनिक भागही सारखे आहेत पण काल्पनिक भागांची चिन्हं उलट आहेत.

प्रा.: बरोबर. अशा जोड्यांचं महत्त्व मिश्र संख्यांच्या चर्चेत पुष्कळ आहे. त्यांना आपण अनुबद्ध (conjugate) म्हणजे (काही एका प्रकारं) एकमेकींशी जोडलेल्या, मिश्र संख्या म्हणू.

मिश्र संख्यांच्या बेरजा इ. क्रिया (भागाकार तूर्त वगळू) एरवीच्या बीजगणिताप्रमाणंच असतात. फक्त $i^2=-1$ इतकं लक्षात ठेवून गरजेनुसार वापरायचं. पुढील उदाहरणं सोडवा. ($i^3=-i$, $i^4=1$, इत्यादीसुद्धा वापरा.)

बेरजा करा. (1) 3 + 4i, 2 - i; (2) -2 + 5i, -3 + 2i;

(3) 1- i , 2 + i; (4) 3 + i, 2 + 6i;

(5) (-1 + √3i)/2, (-1- √3i)/2.

गुणाकार करा.

(1) 2 + 5i, 3 - 4i; (2) 5 - 8i, -3 + 4i;

(3) 3 - 4i, 3 + 4i; (4) -2 - 3i, -3 - 2i;

(5) (-1+√3i)/2, (-1- √3i)/2;

ह्या शेवटच्या दोन संख्यांचे वर्ग करून पाहू.

पहिल्या संख्येचा वर्ग

$= [(-1 + \sqrt{3}i)/2]^2 = [1 - 3 - 2\sqrt{3}i]/4 = [-1 - \sqrt{3}i]/2$

= दुसरी संख्या

आणि दुसऱ्या संख्येचा वर्ग

$= [(-1 - \sqrt{3}i)/2]^2 = [1 - 3 + 2\sqrt{3}i]/4 = [-1 + \sqrt{3}i]/2$

= पहिली संख्या.

ह्या दोन संख्यांचा हा गुणधर्म मनोरंजक आहे की नाही? प्रत्येक संख्या दुसरीचा वर्गाबरोबर! आपण नंतर त्यांचा पुन्हा विचार करूच. **अनुबद्ध मिश्र संख्यांचे बेरीज-गुणाकार वास्तव असतात.**

x+iy, x-iy करता करून पहा. आणि वर दिलेल्या दोन्ही उदाहरण-संचांतली शेवटची दोन उदाहरणं पहा. याचा व्यत्यासही सत्य असतो....

प्रमेयः बेरीज व गुणाकार वास्तव असणाऱ्या मिश्र संख्या अनुबद्ध असतात.

संख्या खरोखरच मिश्र असल्या पाहिजेत. शुद्ध वास्तव किंवा शुद्ध काल्पनिक असल्या तर त्या अनुबद्ध दाखवता येतीलच असं नाही.

सिद्धताः समजा ज्यांचे बेरीज व गुणाकार वास्तव आहेत अशा x+iy आणि p+iq ह्या दोन मिश्र संख्या आहेत. एक बाब सरळ आहे की x, y, p, q या सर्व शून्येतर असणार. नाहीतर कोणती तरी संख्या केवल वास्तव किंवा केवल काल्पनिक ठरेल. त्यांची बेरीज (x+iy) + (p+qi) = (x+p) + (y+q)i पण, बेरीज वास्तव असल्यानं काल्पनिक भाग शून्य. म्हणजेच, q=-y. एक भाग झाला. ह्याचा वापर करून गुणाकार करू.

गुणाकार = (x+iy)(p-yi). याचा काल्पनिक भाग शून्य असल्याचं मानून काय मिळतं ते पाहू. काल्पनिक भाग = y(p-x)=0 पण y शून्य नसल्यानं त्याचा लोप करून p=x हेच उत्तर उरतं.

सहज जाता जाता एक माहिती सांगतो. **सहगुणक वास्तव संख्या असलेल्या कोणत्याही वर्गसमीकरणाची मुळं मिश्र असतील तर ती अनुबद्ध असतात.** आपण एक उदाहरणच पाहू. $x^2-6x+10=0$ हे वर्गसमीकरण पहा. यात a=1, b=-6, c=10. विवेचक $\triangle = b^2-4ac = 36-40=-4$. $\sqrt{\triangle} = \sqrt{(-4)}=2i$. म्हणून सूत्रानुसार उत्तरं 3+2i, 3-2i. त्या अनुबद्ध मिश्र संख्या आहेतच. कारण चिन्ह बदलणारा भाग $\sqrt{(b^2-4ac)}$ असा असतो. यातील करणीखालचा भाग ऋण असेल तर काल्पनिक भाग तेवढाच चिन्ह बदलतो. दोन मुळांतला वास्तव भाग सारखाच असतो.

मो.: सर, मिश्र संख्या संख्यारेषेवर दाखवता येतात का?
प्रा.: संख्यारेषेवर कशा दाखवता येतील?
मो.: का? संख्यारेषेवर का दाखवता येणार नाहीत?
प्रा.: अहो, प्रत्यक्षात मिश्र संख्येत दोन वास्तव संख्या असतात ना? त्यातील एक वास्तव भाग आणि दुसरा काल्पनिक भाग असतो. म्हणजे मिश्र संख्येशी संबंधित दोन वास्तव संख्या असतात आणि त्यांचा क्रमही लक्षात घ्यावा लागतो. कारण, 3 + 4i आणि 4 + 3i ह्या दोन मिश्र संख्या सारख्या नव्हेत. याचा अर्थ वास्तव संख्यांची क्रमित जोडी घ्यायला हवी.
मो.: मिश्र संख्यांची निर्देशक भूमितीशी सांगड घालता येते का?

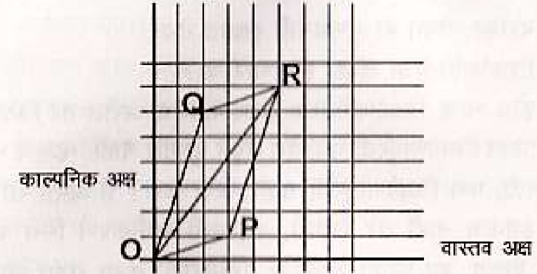
प्रतलीय (शुद्ध) भूमिती, प्रतलीय निर्देशक भूमिती आणि मिश्र संख्या:

प्रा.:. एकदम बरोबर. त्यामुळं आपण x,y अक्ष काढून मिश्र संख्या प्रतलावर दाखवू शकतो. निराळ्या शब्दांत, मिश्र संख्या प्रतलावर स्थापन करू शकतो. म्हणून कधी कधी निर्देशक प्रतलाला मिश्र प्रतल (Complex plane) असंही म्हणतात. ह्याला Argand diagram असंही एक नाव आहे. सर्व केवल वास्तव संख्या x-अक्षावर (y=0) सापडतात आणि...
का.: केवल काल्पनिक संख्या y-अक्षावर सापडतात ना?
प्रा.: बरोबर. (x=0) म्हणूनच x, y अक्षांना अनुक्रमे, वास्तव अक्ष (real axis) आणि काल्पनिक अक्ष (imaginary axis) असंही म्हणतात.

मिश्र संख्यांची बेरीज प्रतलावर कशी दाखवता येईल, त्याचा गंमत म्हणून शोध घेऊ या. मनोरंजक अनुभव मिळेल. आणि सदिशांची (vector) बेरीज आणि मिश्र संख्यांची बेरीज ह्यांतलं साम्यही लक्षात येईल.

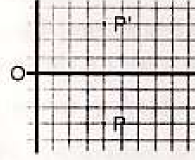
निर्देशक भूमिती, (प्रतलीय) सदिश आणि मिश्र संख्या, ह्या बाह्यतः भिन्न वाटणाऱ्या गणित-शाखांमधील हा साम्य-संबंध समजून वेगळीच गंमत वाटेल. त्यासाठी आपण काही नेमक्या संख्या घेऊ. समजा 3+i, 2+6i ह्या संख्या घेतल्या. मग निर्देशक भूमितीकरता निर्देशक कोणते घ्यायचे?
का.: (3,1), (2,6). बरोबर ना?
प्रा.: बरोबर. त्या मिश्र संख्यांची बेरीज किती? आणि निर्देशक काय?

ता.: बेरीज 5+7i आणि निर्देशक (5,7).
प्रा.: बरोबर. आता मी यांचा आलेख काढतो. बिंदूना अनुक्रमेP=(3,1), Q=(2,6), बेरीज R=(5,7) अशी नावं देऊ. आलेख असा येईल. जर आपण O आरंभबिंदू मानला, OP, OQ हे दोन सदिश् मानले आणि OR बेरीज-सदिश मानला तर, सदिशांच्या बेरजेचा समांतरभुजचौकोन नियम



आणि मिश्र संख्यांच्या बेरजेचा नियम सारखेच असल्याचं आकृतीवरून कळून येतं की नाही?
मो.: खरंच की! बाह्यतः वेगळ्या वाटणाऱ्या शाखांचा असा संबंध आपण मुलांनाही सांगितला पाहिजे, नाही का?
प्रा.: नक्कीच. आणि या सगळ्याचा त्रिकोणमितीशीही संबंध असतो.
का.: काय सांगता? असा संबंध आहे?
प्रा.: आहे तर. मिश्र संख्या, निर्देशक भूमिती आणि त्रिकोणमिती यांचा तर फारच घनिष्ठ संबंध आहे. पण आधी एक उपयुक्त माहिती घेऊ. अनुबद्ध मिश्र संख्या प्रतलावर कशा रहात असतील? काही कल्पना?
ता.: दोघांचे x-निर्देशक तेच असणार. आणि y-निर्देशकांची फक्त चिन्हं उलटी असणार. बरोबर?
प्रा.: बरोबर. पण प्रत्यक्षात आलेखावर काढून दाखवा ना. उदा. पुढं दिलेल्या दोन अनुबद्ध संख्या घ्या. P=4+3i आणि P'=4-3i
ता.: मी काढतो आकृती. ही पहा. बरोबर आहे?
प्रा.: बरोबर. पण आकृतीचं वैशिष्ट्य वर्णन करून सांगता?
का.: हे दोन बिंदू x-अक्षात परस्परांच्या प्रतिमेसारखे वाटतात. असंच

म्हणायचंय ना?



प्रा.: बरोबर. तेव्हा हा गुणधर्मही लक्षात ठेवा.

मो.: त्रिकोणमितीचा संबंध सांगणार ना?

प्रा.: होय. मात्र, त्रिकोणमितीचा संबंध पहायचा असेल तर त्रिकोणमिती फक्त काटकोन त्रिकोणापुरती मर्यादित ठेवून पुरणार नाही. म्हणजे म्हणायचं त्रिकोणमिती, पण त्रिकोणापुरती नाही, असं कसं? ते आता सांगतो.

इतकंच नाही तर रेषांची, वर्तुळांची समीकरणं मिश्र संख्यांनी दाखवता येतात. ह्या तिन्ही शाखांचा परस्परांशी कसा संबंध आहे, हेही दाखवता येतं. वर्तुळाचं समीकरण तुम्हाला सांगेनच. पण, तूर्त तरी त्यात वेळ घालवणं परवडणारं नाही. आज आपला उद्देश वेगळा आहे. आधी वर्गसमीकरणांचा आणि मिश्र संख्यांचा संबंध पाहू. कारण एकूण एक वर्गसमीकरणं सोडवण्यासाठीच मिश्र संख्या गणित्यांनी शोधल्या ना?

त्रिकोणमिती:

प्रथम आपण त्रिकोणाच्या पलीकडील त्रिकोणमिती म्हणजे काय ते पाहू. कधी कधी sin 90=1 का? असा प्रश्न तुम्हाला पडत असेल. काटकोन त्रिकोणाच्या लघुकोनाचा sine म्हणजे समोरील बाजू/कर्ण अशी व्याख्या करतात. ज्याचं गुणोत्तर काढायचं तो लघुकोनच हवा, हे त्या व्याख्येत अध्याहृतच असतं. अशा स्थितीत काटकोनाचं sine गुणोत्तर ही कल्पनाच हास्यास्पद ठरते नाही का? एकाच त्रिकोणात दोन काटकोन कसे असतील? बरं, आणि विशालकोनांचं काय?

का.: खरंच आहे ते. मग त्याला उपाय काय?

प्रा.: जसं, कोणत्या तरी अडचणीचं निराकरण करण्याच्या प्रयत्नातून मिश्र संख्या निर्माण केल्या. तसंच आता करू. आपण कोनांच्या अणि आपली त्रिकोणमितीतील गुणोत्तरांच्या व्याख्याच बदलू.

ता. : विशालकोनाची व्याख्या त्यात बसवता येईल?

प्रा. : सगळ्याच कोनांच्या येतील. कसं ते सांगतो. तुम्हाला हे माहीत असेल की, गुराख्याचा पोरगा खांबाला दोरखंडाचं वेटोळं घालतो, आणि तेवढ्यानंसुद्धा माजलेल्या बैलाला रोखून धरू शकतो. ते कसं?

का.: घर्षणामुळं.

प्रा.: बरं, मग वेढे वाढवले तर घर्षण कमी होईल की जास्त?

ता.: अर्थातच जास्त.

प्रा.: त्यामागं काय तत्त्व आहे?

का.: आम्हाला माहीत नाही.

प्रा. : जास्त वेढे तर जास्त घर्षण. जास्त वेढे देण्याकरता त्या खांबाला जास्त प्रदक्षिणा घालाव्या लागतील की नाही? म्हणजेच जास्त *कोना*तून फिरावं लागेल की नाही?

मो.: होय सर.

प्रा. : इथं कोनाचा काही वेगळा अर्थ आहे, असं मनोमन वाटत नाही?

का.: होय सर. त्याला भ्रमण (rotation) कोन असं आम्ही म्हणतो.

प्रा. : ठीक. पण, अर्थ काय लावलात?

ता. : किती फिरलो त्यावरून कोनाचं माप ठरवलं.

प्रा. : बरोबर. पण, त्याच दृष्टीनं आता आपण कोनाच्या कल्पनेचा विस्तार करू. आणि अशा कोनांकरता त्रिकोणमितीही कशी असते, ते पाहू. पण, एक काळजी घेणं जरूर आहे. संख्यांच्या विस्तारात जे धोरण होतं ते इथंही पाळायचं. म्हणजे आपण कोनकल्पनेचा किंवा त्रिकोणमितीचा विस्तार करताना मुळात आपल्याजवळ जे होतं ते गमवायचं नाही. तर, त्यांचा मूलभूत अर्थ तोच राहील, अशी काळजी घ्यायची म्हणजे, नव्वद किंवा मोठ्या कोनांच्या त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांकरता नवी व्याख्या सांगितली तरी लघुकोनांच्या गुणोत्तरांकरता, त्या नव्या व्याख्येमुळं मिळणारा अर्थ आणि आधीचा अर्थ सारखेच असावेत. तरच आपण व्याख्येचा विस्तार केला असं म्हणणं योग्य ठरेल नाही का?

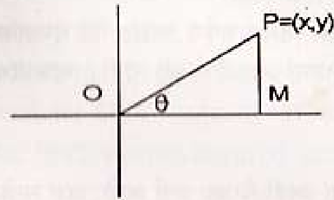
सा. : म्हणजे काय?

प्रा. : समजा कोनाची नवीन व्याख्या दिली. आणि त्याचा sine म्हणजे काय तेही ठरवलं. तर त्या व्याख्येप्रमाणं मिळणारा लघुकोनाचा sine

आणि त्याच लघुकोनाचा आपला पूर्वीचा sine, म्हणजे समोरील बाजू भागिले कर्ण, हे सारखे यायला पाहिजेत. तरच कोनाची कल्पना आणि त्याच्या गुणोत्तरांची कल्पना ह्यांचा विस्तार केला असं म्हणता येईल.

शे. : ते कसं करता येईल?

प्रा. : आकृती काढू. O मधून जाणारा असा, समजा r लांबीचा, एक रेषाखंड काढू. त्याच्या दुसऱ्या टोकाला P म्हणू. मुळात हा OP रेषाखंड x-अक्षाशी एकरूप होता असं समजू. आणि आता तो घड्याळाच्या काट्याच्या विरुद्ध दिशेनं फिरू लागला आहे, असं मानू.



तो जसजसा फिरेल तसतसे P चे सहगुणक बदलत जातील. आता एक सांगा की रेषाखंड मुळापासून किती फिरला की तो कोन आणि P चे निर्देशक यांच्यात एक-एक संबंध राहील?

ता. : काहो सर? पण सर, त्याची एक फेरी पूर्ण झाली की तो पुन्हा पहिल्याच जागी येईल ना? (प्रा. मान डोलवतात.) म्हणजे त्यांच्यातला संबंध एकास एक कसा राहील?

प्रा. : नाही राहणार. ते पण सांगतो. आता सांगा, की एका फेरीत रेषाखंड OP कितीपासून कितीपर्यंत कोनातून फिरू शकेल?

सु. : शून्य ते 360 अंशांतून.

प्रा. : 360 पासून पुन्हा सर्व त्याच प्रकारं फिरत राहील. उदाहरणादाखल, 390 म्हणजे 30, म्हणजे 420 म्हणजे 60. पण -30 म्हणजे किती सांगता?

मो.: 330 का? कारण हेही घड्याळी गणिताप्रमाणंच दिसतंय.

प्रा.: बरोबर. 360 मापाचं घड्याळी गणित. बरं 690 म्हणजे किती?

ता.: 330 च. कारण, 690 - 360 = 330.

प्रा.: ज्या कोनांत 360 चा फरक असेल त्या कोनांत काहीही फरक केला नाही तर एक एक संबंध मिळेल की नाही?

ठीक. आता, आकृतीप्रमाणं P चे निर्देशक (x,y) मानू. आणि कोनाकरता θ (ग्रीक अक्षर थीटा) हे नाव घेऊ. θ कोनाचा sine आणि cosine यांच्या व्याख्या पुढीलप्रमाणं करू. $\cos\theta = x/r$, $\sin\theta = y/r$. आता असं पहा की कोन कोणत्याही किमती घेत असला तरी θ ची sine आणि cosine ही दोन्ही गुणोत्तरं मिळतील की नाही?

का.: होय सर. पण, नव्या व्याख्येप्रमाणं. आणि घड्याळी गणिताचा उपयोग करून सर्वांची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरं काढू शकतोच ना?

प्रा. : बरोबर. शिवाय, sin 390=sin30, sin (-30)=sin 330 असंही मिळेल. आणि P पहिल्या पादात असताना त्रिकोण OPM ह्या काटकोन त्रिकोणावरून मिळणारी θ ची म्हणजेच लघुकोन POM ची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरं पूर्वीसारखीच म्हणजे $\sin\theta = y/r$ =समोरील बाजू/कर्ण, $\cos\theta = x/r$ = शेजारील बाजू/कर्ण अशीच मिळतील ना?

का.: होय सर. आता आलं लक्षात विस्तार कसा झाला ते.

प्रा. : आणखी एक मुद्दा. कोन काहीही असला तरी $x^2+y^2=r^2$ नेहमीच सत्य असल्यामुळं, r^2 नं भागल्यास $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ हे नित्य समीकरणही सर्वच कोनांकरता सत्य राहतं. sin 0 = 0, sin 90 = 1 का, तेही पाह्यचं आहे. POX= θ =0 समजा. मग P कुठं असेल?

ता.: x-अक्षावर.

प्रा. : मग त्याचे निर्देशक काय?

ता.: x= r आणि y=0, असे असतील. म्हणून sin 0=y/r=0. आणि तसंच cos 0=1. आलं लक्षात.

प्रा. : आता समजा θ=90 असेल. मग P कुठं असेल? आणि त्याचे निर्देशक काय असतील?

का.: y-अक्षावर. आणि निर्देशक (0,r) असतील. समजलो. म्हणूनच sin 90=r/r=1 आणि cos 90=0/r=0.

प्रा. : आपल्या नव्या व्याख्येनुसार त्रिकोणमितीय गुणोत्तरं नेहमी धनच असतील असं नव्हे. त्यामुळं फक्त लघुकोनांची गुणोत्तरं घेतली तर ती दोन्ही प्रकारांत सारखी असल्यानं धन येतील. तशी ती यायला हवीतच ना? कारण आपण त्रिकोणमितीचा विस्तार करू पहात आहोत.

का. : कळलं सर. पण, सर ऋण गुणोत्तराचं उदाहरण सांगता?

प्रा. : ती काय तुम्हीसुद्धा सांगू शकाल. आणि मगाशी मी -30=330 चं उदाहरण सांगितलंच की. कारण आपली गुणोत्तरं P च्या निर्देशकांवर अवलंबून असतात, किती फेरे झाले ते गौण असतं.

कोणत्या चरणात कोणते निर्देशक धन किंवा ऋण असतात, ते तुम्हाला माहीतच आहे. पहिल्या चरणात दोन्ही धन. दुसऱ्या चरणात x ऋण आणि y धन. तिसऱ्या चरणात दोन्ही ऋण आणि चौथ्या चरणात y ऋण आणि x धन. यानुसार sin आणि cos गुणोत्तरांची चिन्हं ठरतील. आणि आता दुसऱ्या चरणात y धन असल्यामुळं sin गुणोत्तर धन आलंच.

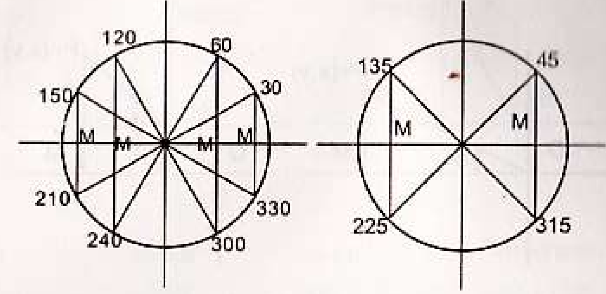
sin +ve	All +ve
tan +ve	cos +ve

मो.: पण सर, मिश्र संख्या आणि त्रिकोणमितीचा संबंध दाखवा ना.

प्रा.: पण, समजूत सोपी होण्यासाठी विशिष्ट कोनांचीच गुणोत्तरं पाहू. ही गुणोत्तरं OP च्या लांबीवर अवलंबून नसतात, हे तुम्हाला माहीतच आहे. कोन किती ते महत्त्वाचं. म्हणून आपण ही लांबी 1 असल्याचं समजू. त्यानं आपल्या विवेचनात फरक पडणार नाही. मात्र, आकडेमोड सोपी होईल. मग आपली त्रिकोणीय गुणोत्तरं आणि निर्देशक भूमिती यांच्यांतला संबंध कसा राहील?

ता.: $\cos \theta = x$, $\sin \theta = y$ असे राहतील. बरोबर?

प्रा.: बरोबर. आपण कोनांची मापं 30, 45, 60, 90, 120...(आकृती पहा) घेऊन काय होतं ते पाहू. प्रथम केंद्र आरंभबिंदू आणि त्रिज्या 1 असलेल्या वर्तुळावर इष्ट ते सर्व कोन दाखवू. (P ची नावं दिलेली नाहीत. आणि O सुद्धा दाखवलेला नाही.) तसंच, आकृती गुंतागुंतीची होऊ नये म्हणून मी दोन वेगळ्या आकृती काढल्या आहेत. आणि कोनांचेही दोन गट केले आहेत. परिणामी, पहिल्या आकृतीतले सर्व OPM त्रिकोणएकरूपच आहेत. आणि ते सर्व त्रिकोण 30-60-90 प्रकारचे आहेत. 30, 150, 210,



330, कोनांकरता त्यांच्यातील लहान बाजू y=1/2 आणि मोठी बाजू $x=\sqrt{3}/2$ (चिन्ह वगळता, कारण त्या निर्देशक नव्हेत) अशा आहेत. आणि 60, 120, 240, 300 ह्या कोनांकरता लहान बाजू x=1/2 आणि मोठी बाजू $y=\sqrt{3}/2$ अशा आहेत, इतकाच काय तो फरक. त्यांमुळं फक्त sin आणि cos यांच्यात अदलाबदल होईल. बाकी भूमिती तीच राहील.

दुसऱ्या आकृतीतील सर्वच त्रिकोण असे 45-45-90 असल्यानं $x=y=1/\sqrt{2}$ असंच राहणार. परिणामी चिन्हं सोडता sin, cos, दोन्ही सारखेच असणार. ह्या परिच्छेदातले सगळे मुद्दे नीट लक्षात घ्या.

इथं पुढच्या दोन आकृतींत फक्त 30 आणि 45 असे कोनच दाखवले आहेत. त्यानरून इतर त्रिकोणांची भूमिती सहज समजेल. आता आपण OP=1 समजत आहोत मग पहिल्या आकृतीत OM = x = ? MP = y = ? तुम्हाला त्रिकोणाचे गुणधर्म माहीत आहेत.

का.: $OM = x = \sqrt{3}/2$, $MP = y = 1/2$ बरोबर?

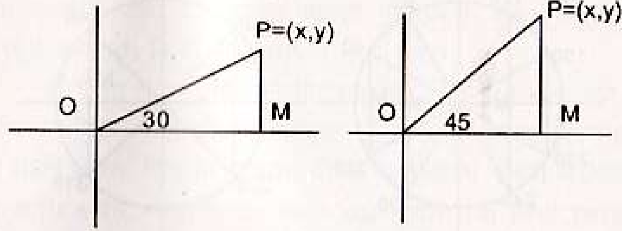
प्रा.: बरोबर. मग cos 30 आणि sin 30 च्या किमती किती ते सांगा.

ता.: तुम्ही सांगितल्याच आहेत की, सर. पण आपण यात नवीन काहीच केलं नाही.

प्रा.: कारण, अजून आपले कोन लघुकोनच आहेत. त्यामुळं तुम्हाला तसं वाटतंय. आपण जेव्हा पुढच्या चरणांत शिरू तेव्हा फरक जाणवेल. पण, आता मिश्र संख्यांचा उपयोग करून 30 करता P चं स्थान सांगा.

मो.: मिश्र संख्या म्हणजे x + iy. इथं $x=\sqrt{3}/2$, $y=1/2$ $\sqrt{3}/2 + i/2$

बरोबर?



प्रा.: बरोबर. पण जरा सुटसुटीत लिहा.

मो.: $(\sqrt{3} + i)/2$. आता बरोबर?

प्रा.: एकदम. याचप्रमाणं 45 कोनाचं करू. प्रथम x, y किती ते सांगा.

ता.: $x = 1/\sqrt{2}$, $y = 1/\sqrt{2}$ बरोबर?

प्रा.: छान! आणि संबंधित मिश्र संख्या?

का.: $(1 + i)/\sqrt{2}$ बरोबर?

प्रा.: होय. कोन 60 आणि 120 घेऊ. खालच्या आकृती पहा. आणि P चे निर्देशक शोधा. काळजीपूर्वक शोधा. आता खरं तर सर्व कोन दाखवणारी मागची आकृती घेता येईल. पण एक तरी उदाहरण पूर्णपणं करू.

मो.: दुसऱ्या आकृतीप्रमाणं $x = 1/2$ येईल. (प्राध्यापकांची नकारार्थी मान पाहून) नाही सर, -1/2. आणि $y = \sqrt{3}/2$.

प्रा.: आता बरोबर. चिन्हाबद्दल काळजी घ्या. मिश्र संख्या सांगा.

मो.: $(-1 + \sqrt{3}i)/2$ बरोबर?

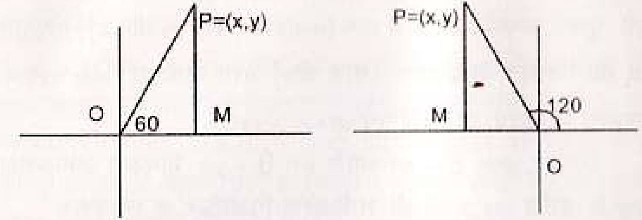
प्रा.: होय. ही संख्या बेरीज-गुणाकारांच्या उदाहरणांत पाहिली होती. आठवते? आता 135 आणि 150 हे कोन घ्या.

का.: 135 कोनाबद्दल मी सांगतो. POM = 45. $x = -1/\sqrt{2}$, $y = 1/\sqrt{2}$. मिश्र संख्या $(-1 + i)/\sqrt{2}$ बरोबर?

प्रा.: एकदम बरोबर.

ता.: 150 कोनाचं मी सांगतो. कोन POM = 30. यावरून $x = -\sqrt{3}/2$, $y = 1/2$. मिश्र संख्या $(-\sqrt{3} + i)/2$ बरोबर?

प्रा.: बरोबर. आता मी एक कोष्टक लिहितो. ते तुम्ही पडताळून पहा.



कोन	x=cos	y=sin	मिश्र संख्या
30	$\sqrt{3}/2$	1/2	$(\sqrt{3} + i)/2$
45	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$(1 + i)/\sqrt{2}$
60	1/2	$\sqrt{3}/2$	$(1 + \sqrt{3}i)1/2$
120	-1/2	$\sqrt{3}/2$	$(-1 + \sqrt{3}i)1/2$
135	$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$(-1 + i)/\sqrt{2}$
150	$-\sqrt{3}/2$	1/2	$(-\sqrt{3} + i)/2$
210	$-\sqrt{3}/2$	-1/2	$(-\sqrt{3} - i)/2$
225	$-1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	$(-1 - i)/\sqrt{2}$
240	-1/2	$-\sqrt{3}/2$	$(-1 - \sqrt{3}i)1/2$
300	1/2	$-\sqrt{3}/2$	$(1 - \sqrt{3}i)/2$
315	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	$(1 - i)/\sqrt{2}$
330	$\sqrt{3}/2$	-1/2	$(\sqrt{3} - i)/2$

मो.: आमच्या एक लक्षात आलंय की त्याच तीन संख्या चिन्ह बदलून किंवा वास्तव आणि काल्पनिक यांच्या जागा बदलून येत आहेत. कारण मुळात आपण 30, 45 आणि 60 हे तीनच कोन घेतले आहेत. आमच्या दहावीपर्यंतच्या त्रिकोणमितीच्या कोष्टकातही असंच असतं.

प्रा.: खरं तर 30, 45 हे दोनच कोन. कारण 30, 60 कोनात x, y यांची म्हणून cos, sin यांची अदलाबदल होते. बाकी काहीच फरक नाही. -30 कोनाची गुणोत्तरं काय येतील?

ता.: जी 330 ची आहेत तीच ना?

प्रा.: होय. आता थोडी तात्त्विक चर्चा करू. (पहिल्या वाचनात ही चर्चा गाळली तरी चालेल.) आपण $z=x+yi$ असं लिहितो. OP नं x-अक्षाशी

केलेला कोन जर θ नं दाखवला तर आपल्याला $\tan \theta = y/x$ असा संबंध मिळतो. दुसरं म्हणजे r ला z चं माप (magnitude or modulus) म्हणतात. तो $|z|$ ह्या चिन्हानं दाखवतात. (मॉड् झेड्) असा वाचतात. $\sqrt{(x^2+y^2)} = r$ आपल्याला माहीतच आहे. म्हणून $|z| = \sqrt{(x^2+y^2)} = r$.

शिवाय, $\cos \theta = x/r$ आणि $\sin \theta = y/r$ यांवरून आपल्याला $x = r.\cos\theta$ आणि $y = r.\sin\theta$ ही समीकरणं मिळतील. व त्यांवरून

$$z = x+iy = r.(\cos \theta + i\sin\theta)$$

असं लिहिता येतं. आपल्या सर्वच कोनांकरता आपण $OP = |z| = 1$ घेतल्यानं सर्व P बिंदू 1 त्रिज्या असलेल्या वर्तुळावर राहतात. म्हणून केंद्र आरंभबिंदू आणि त्रिज्या 1 असलेल्या वर्तुळाचं मिश्र संख्यात्मक समीकरण $|z| = 1$ असं असेल.

वर्गसमीकरणं आणि आलेखः

प्रा.: पूर्वी म्हटल्यानुसार वर्गसमीकरणांकडे वळू. माध्यमिक पातळीवर परवलयाचा आलेख काढणं असेलच ना?

का.: आहे ना.

प्रा.: आपण क्रमानं तीन (परस्परसंबंधित) वर्गसमीकरणं घेऊ आणि त्यांचे आलेख काढू. प्रत्यक्ष आलेखपत्र घेऊन तुम्ही आलेख काढून पहा. त्याशिवाय पक्की समजूत होणार नाही.

$$x^2-6x+8=0, \quad x^2-6x+9=0, \quad x^2-6x+10=0$$

ह्या तीन समीकरणांचे आलेख खाली दाखवले आहेत. पण, त्यांनी समीकरणं कशी सोडवायची ते पुन्हा एकदा सांगतो. तुम्ही समीकरणाचे तुकडे करता. तुम्ही पहिल्या समीकरणाचे तुकडे $y=x^2$, $y=6x-8$, असे करता. ह्यांतलं पहिल्या समीकरणाचा आलेख परवलय आहे. आणि दुसऱ्या समीकरणाचा आलेख एक रेषा आहे. x आणि y दोघांच्या किमती दोन्ही समीकरणांत सारख्याच याव्यात अशी अपेक्षा असेल तर आधी दोन्हींतल्या y चा लोप करायचा. म्हणजे पहिलं वर्गसमीकरण मिळेल. थोडक्यात, आलेखांच्या छेदनबिंदूचे x-निर्देशक म्हणजेच समीकरणाची मुळं होत.

पण, तसे तुकडे करण्याऐवजी मी $y=x^2-6x+8$ आणि $y=0$ असे

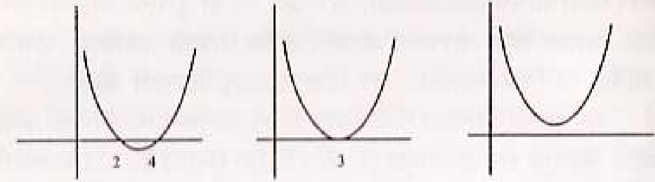
तुकडे करणार आहे. दुसऱ्या समीकरणाचा आलेख काय असेल?

मो.: x-अक्षच असणार, सर.

प्रा.: बरोबर. x-अक्षावरील कोणत्याही बिंदूच्या y-निर्देशकाची किंमत शून्य असते. ह्या दोन्ही समीकरणांचं समाधान करणाऱ्या अशा x, y च्या सारख्याच किमती आपल्याला हव्या आहेत. दुसरं समीकरकण $y=0$ म्हणजे x-अक्ष हे आत्ता तुम्ही सांगितलंच. म्हणजे $y=x^2-6x+8=0$ येईल अशा x च्या किमती शोधल्या पाहिजेत. निराळ्या शब्दांत, $x^2-6x+8=0$ हे वर्गसमीकरण सोडवलं पाहिजे. भूमितीच्या दृष्टीनं $y=x^2-6x+8$ चा आलेख y-अक्षाला जिथं छेदतो त्या बिंदूंचे x-निर्देशक हवेत. इथं तुम्हाला बीजगणित आणि भूमिती यांच्यातला संबंध अधिक सखोलपणं कळून आला असेल. बरं आता सांगा, $x^2 > 4$ केव्हा असेल?

मो.: जेव्हा $x > 2$ असेल तेव्हा.

प्रा.: एक घोटाळा केलात. जर $x=-3$ असेल तर मग? तरीही $x^2 > 4$



असणारच. तुम्ही x चं केवलमूल्य >2 असं म्हणायला हवं. म्हणजे एक तर x चं मूल्य -2 पेक्षा लहान, किंवा 2 पेक्षा अधिक असताना $x^2 > 4$ राहील. या सर्व समीकरणांचा आलेखही परवलयच असतो. तो y-अक्षाभोवती सममित नसतो. असो. आता हे आलेख पहा. पहिल्यापेक्षा दुसरा थोडा वर आणि तिसरा त्याच्याही वर आहे. असं का झालं असेल? सांगतो.

ही तिन्ही समीकरणं आपण पुढीलप्रमाणं पूर्ण वर्ग करून लिहू,

$$(x-3)^2-1=0, \ (x-3)^2=0, \ (x-3)^2+1=0.$$

पहिल्या समीकरणाकरता डावी बाजू धन हवी असेल तर $(x-3)^2 > 1$ जरुरीचं आहे. म्हणजेच $(x-3) < -1$ किंवा $(x-3) > 1$ असंच असायला हवं. म्हणजेच, $x < 3-1=2$ किंवा $x > 3+1=4$ यांपैकी एक असायलाच हवं. प्रत्यक्ष $x=2,4$ असताना डाव्या बाजूची किंमत 0 येते. आणि 2 व 4

यांच्या दरम्यान असताना y ऋण असतो. पहिल्या आलेखाचं निरीक्षण करा. म्हणजे नेमकं हेच आलेखावरून दिसून येईल. आता दुसरं समीकरण पहा. ते $(x-3)^2=0$ असं लिहिलं आहे. याचा अर्थ x=3 असताना डावी बाजू, कमीत कमी, म्हणजे शून्य असेल अन्यथा वर्ग असल्यानं ती धनच असणार. आलेखातील परवलय x-अक्षाला स्पर्श करीत असल्याचं दिसत आहे. आणि तिसरं समीकरण $(x-3)^2+1=0$ असं लिहू. याचा अर्थ डावी बाजू x च्या कोणत्याही *वास्तव* किमतीकरता शून्य असणारच नाही. तसं असणं म्हणजे $(x-3)^2=-1$ असणं!

टीप: समीकरणाचा आलेख कसा असेल हे बीजगणितानं आधीच कसं ठरवता येतं, ह्याची काहीशी कल्पना तुम्हाला आली असेल, असं समजतो.

म्हणजे एखाद्या वर्गसमीकरणाची दोन्ही मुळं वास्तव असून भिन्न असतील तर त्याचा आलेख पहिल्या आकृतीप्रमाणं (किंवा उलटा परवलय) म्हणजे अक्षाला दोन *भिन्न* बिंदूंत छेदणारा असतो. जर वास्तव आणि समान (किंवा अभिन्न identical) असतील तर तो दुसऱ्या आकृतीप्रमाणं म्हणजे अक्षाला स्पर्श करणारा असतो. आणि वास्तव नसतील, म्हणजे काल्पनिक वा मिश्र असतील, तर तिसऱ्या आकृतीप्रमाणं असतो.

ह्या तिन्ही समीकरणांचे विवेचक $\triangle$ अनुक्रमे 4, 0, -4, असे असतील. त्यामुळं त्यांची वर्गमुळं (1) 2, -2, (2) 0, (3) 2i, -2i असणार. वर्गसमीकरणाच्या सूत्राप्रमाणं उकली अनुक्रमे 2,4; 0,0; 3+i, 3-i अशा असतील. तिसऱ्या प्रकारात मुळं अनुबद्ध मिश्र संख्या असल्याचं लक्षात आलंच असेल. आणि हे आपण पूर्वी सोडवलं आहे.

आता आपण 1 ची वर्गमुळं, घनमुळं, चतुर्थ मुळं पाहू.

का.: 1 ची घनमुळं आणि चतुर्थमुळं?

1 ची वर्गमुळं:

प्रा.: आश्चर्य वाटलं? बरं, 1 ची वर्गमुळं किती आणि कोणती?

ता.: 1 आणि -1. बरोबर?

प्रा.: बरोबर. म्हणजे 1 ला दोन वर्गमुळं आहेत. त्याचप्रमाणं 1 ला घनमुळं तीन, चतुर्थ मुळं चार, पंचमुळं पाच, इत्यादी असणार. ती कोणती?

मो.: तुम्ही सांगता आहात ते सारं नवल वाटणारंच आहे.

1 ची चतुर्थमुळं:

प्रा.: खरं आहे. वर्गमुळांपर्यंत ठीक आहे. पण पुढं जायला लागलो की ही मुळं वास्तव संख्याच असतील असं नाही. त्यामुळं तुम्हाला नवल वाटतंय. उदाहरणार्थ, आपण आधी चतुर्थमुळं पाहू. कारण तुलनेनं ती समजायला सोपी आहेत. त्यात फार गुंतागुंतीच्या मिश्र संख्या लागत नाहीत. चतुर्थघात म्हणजे वर्गाचा वर्ग की नाही?

का.: होय सर.

प्रा.: मग चतुर्थमुळं म्हणजे वर्गमुळांची वर्गमुळं म्हणता येईल ना?

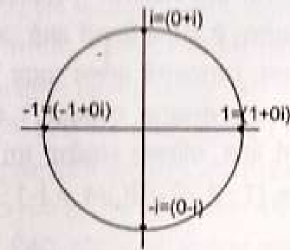
ता.: होय सर.

प्रा.: मग आधी 1 ची दोन वर्गमुळं सांगा? आताच पाहिली.

मो.: 1 आणि -1 ही दोन.

प्रा.: आता यांची वर्गमुळं कोणती? कठिण वाटतं? अहो आपण मिश्र संख्यांचा आरंभ कशापासून केला? $\sqrt{(-1)}=i$ ह्या काल्पनिक संख्यापासून ना? मग 1 ची 1 आणि -1 ही जी वर्गमुळं आहेत, त्यांचीच वर्गमुळं घ्यायला हवीत. यांपैकी 1 ची वर्गमुळं 1 आणि -1. आणि -1 ची वर्गमुळं i आणि -i ही दोन. म्हणजे एकूण {1, -1, i, -i} ही चार चतुर्थमुळं झाली ना? तुमचा विश्वास बसत नसेल तर, त्यांचे चतुर्थघात करून पहा. मिश्र संख्यांप्रमाणं लिहिल्यास ही 1+0i, -1+0i, 0+i, 0-i अशी लिहिता येतात. मिश्र प्रतलावर ह्या संख्या कुठं राहतात सांगता? आधी त्यांचे निर्देशक सांगा.

ता.: (1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1) असे ना?



प्रा.: बरोबर. आता बिंदू शोधा. वरील आकृती पहा.

मो.: सर्व चतुर्थमुळं आरंभबिंदू केंद्र आणि त्रिज्या 1 असलेल्या वर्तुळावर राहतात. आणि अक्षांवरही राहतात. घनमुळांचं काय?

1 ची घनमुळं:

प्रा.: सांगतो. पण, हे बिंदू जोडले तर चौरस, म्हणजे सुसम चौकोन मिळतो, हे पहा. आता मी तुम्हाला अशा दोन संख्या शोधायला सांगतो की त्यांतील प्रत्येक संख्या दुसरीचा वर्ग असेल! नवल वाटतं ना? वास्तव संख्यांपुरतं पाहिलं तर स्वाभाविकतः, दोन बिनमहत्त्वाची किंवा क्षुल्लक उत्तरं मिळतात, 0,0 किंवा 1,1. म्हणजे संख्या 1 आणि 1 किंवा 0 आणि 0. पण ह्या भिन्न नाहीत. पण, वरच्या अटींचं पालन होईल अशा दोन *भिन्न* संख्या हव्यात.

मो.: कसं शक्य होईल? प्रत्येक संख्या दुसरीच्या वर्गाइतकी....अशक्यच.

प्रा.: मिश्र असू शकतील की. त्याकरता x,y अशा दोन संख्या घेऊ. मग x^2=y आणि y^2=x एकाचा लोप करून आपल्याला x^4=x हे समीकरण मिळतं. त्याचे अवयव $x(x-1)(x^2+x+1)=0$ असे येतात. त्यावरून x=0,1 ही दोन उत्तरं तर सरळच मिळतात. पण आपल्याला भिन्न संख्या हव्यात. त्याकरता $x^2+x+1=0$ हे वर्गसमीकरण सोडवू. याचा $\triangle=-3$. म्हणून याची दोन उत्तरं खालील अनुबद्ध मिश्र संख्या मिळतात.

$$(-1+\sqrt{3}i)1/2 \text{ आणि } (-1-\sqrt{3}i)1/2$$

प्रत्येक संख्येचा वर्ग बरोबर दुसरी संख्या येते की नाही, ते पडताळून पहा. मिश्र संख्यांच्या गुणाकाराचं चौथं उदाहरण पहा. (पृ. 7) खाली पुन्हा करून दाखवलंय. मग त्या दोन संख्यांचा गुणाकारही करा. खरं तर ह्या अनुबद्ध मिश्र संख्या आहेत, हे सहज दिसतं आहे. आधी त्यांचा गुणाकार 1 येतो की नाही ते पहा. (वाचकांनी करून पहावं.)

ता.: होय सर. ह्या दोन संख्यांचा गुणाकार 1 येतो.

प्रा.: प्रत्येकीचा वर्ग करू. पहिल्या संख्येचा वर्ग

$=[(-1+\sqrt{3}i)/2]^2 = [1-3-2\sqrt{3}i]/4 = [-1-\sqrt{3}i]/2$

= दुसरी संख्या

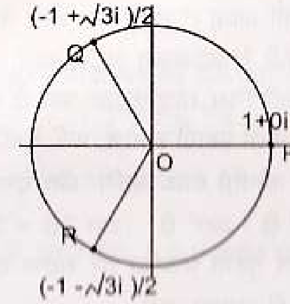
आणि दुसऱ्या संख्येचा वर्ग

$=[(-1-\sqrt{3}i)/2]^2 = [1-3+2\sqrt{3}i]/4 = [-1+\sqrt{3}i]/2=$

दुसरी संख्या. खरं तर हे आपण मिश्र संख्यांच्या गुणाकारात पाहिलंही (पृ. 7) आहे. तुम्ही विसरलात. म्हणून पुन्हा दाखवलं.

ह्या संख्यांना x, y अशी नावं दिलीच आहेत. म्हणजे x^2=y आणि y^2=x असं झालं. ह्या दोन संख्यांचा गुणाकार 1 येतो. याचा अर्थ काय होतो? x^2=y दोन्ही बाजूंस x नं गुणून x^3=y.x=1 हे तर तुम्हाला माहीतच आहे. त्याचप्रमाणं y^3=1 हेही मिळेल. म्हणूनच ह्या दोन संख्यांना 1 ची काल्पनिक घनमुळं (imaginary cuberoots of 1) म्हणतात. 1 हे तर 1 चं घनमूळ आहेच. म्हणून अपेक्षेनुसार एकूण तीन घनमुळं झाली.

ही तीन मुळं खालच्या आकृतीत दाखवल्याप्रमाणं राहतील.



ही सर्व मुळंसुद्धा त्याच वर्तुळावर रहातात, आणि हे बिंदू जोडले की समभुज त्रिकोण मिळतो.

का.: सर मग पंचमुळं जोडली की सुसम पंचकोन मिळतो का?

प्रा.: बरोबर. आणि सर्व मुळांकरता असंच चालत राहील. आता तुम्हाला आणखी एक गंमत सांगतो. OP, O भोवती फिरून OQ शी एकरूप होण्याकरता 120 अंशातून फिरावा लागेल. OR शी एकरूप होण्याकरता 240 अंशातून म्हणजे 120 च्या दुप्पट कोनातून फिरावा लागेल. म्हणजे वर्ग केला की कोन दुप्पट होतो असं $(-1+\sqrt{3}i)1/2$ ह्या पहिल्या संख्येकरता तरी दिसतं. $(-1-\sqrt{3}i)1/2$ ह्या दुसऱ्या संख्येचा वर्ग केला तर असंच होईल का? म्हणजे कोन 240 च्या दुप्पट व्हायला पाहिजे. पाहूया.

240 च्या दुप्पट किती?

का.: 480.

प्रा.: म्हणजे भूमिती काय होईल? OQ, O भोवती फिरून OQ शी एकरूप होण्याकरता 240 अंशातून फिरावा लागेल. OR शी एकरूप होण्याकरता 480 अंशातून म्हणजे 240 च्या दुप्पट कोनातून फिरावं लागेल. त्यांतून 360 वजा केल्यावर किती राहतात?

मो.: 120. अरे! खरंच की!

प्रा.: म्हणजे कोन दुप्पटच झाला ना? 1 त्रिज्येच्या वर्तुळावरील कोणत्याही मिश्र संख्येच्या वर्गाचा कोन पाहिलात तर तो दिलेल्या संख्येच्या कोनाच्या दुप्पट असतो. तसंच इथं झालंय ना?

ता.: आणि त्रिज्या r असेल तर?

प्रा.: तर वर्गसंख्येची लांबी r^2 होते. पण कोन नेहमी दुप्पटच होतो.

का.: असं कोणत्याही संख्यांकरता असतं का?

प्रा.: होय कोणत्याही मिश्र संख्येकरता. पण ते समजून घेण्याकरता आणखी बरीच त्रिकोणमिती पहावी लागेल. पण, तुम्ही त्रिकोणमितीमधील 2θ चे म्हणजे दुप्पट कोनांचे cos आणि sin देणारी

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$, $\sin 2\theta = 2\sin\theta.\cos\theta$

ही दोन नित्यसमीकरणं गृहीत धरलीत तर सहज समजेल. पहा,

$z = \cos\theta + i\sin\theta$ समजा. मग

$z^2 = (\cos\theta + i\sin\theta)^2$

$= (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + i(2\sin\theta.\cos\theta)$

$= \cos 2\theta + i\sin 2\theta$. आहे ना दुप्पट? तूर्त इतकं पुरे.

***

यांच्या आर्थिक सहयोगामुळेच अल्प किंमतीत ही पुस्तिका आपणापर्यंत येत आहेत.

व्यक्ती

कै. श्री. पुरणमल बादामसिंह गुप्ता यांचे स्मरणार्थ
गुप्ता बंधू, वाई

डॉ. शशिकांत कात्रे, पुणे

श्री. गुलाब शेख, S.B.I. लाईफ सातारा

श्री. शौकतअलीखान मोकाशी, वाई

संस्था

दि. वाई अर्बन को-ऑप. बँक वाई

स्व. दिनेश ओसवाल स्मृती प्रतिष्ठान, वाई

वाई तालुका माध्य. शाळा शिक्षक-शिक्षकेतर कर्मचारी सह. पतसंस्था वाई

दि. जनता अर्बन को-ऑप. बँक वाई